

(1)

$$5^n > 10^{19}$$

↓ 常用対数をとる
($\log_{10}$)

$$\log_{10} 5^n > \log_{10} 10^{19}$$

$$n \log_{10} 5 > 19 \log_{10} 10 \quad \log_{10} 10 = 1$$

$$n > \frac{19}{\log_{10} 5} \quad \text{数値計算}$$

ここで、 $\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2$ (定数の差)
 $= 1 - \log_{10} 2$ (⑤ 不等式が計算)

⑤ $0.3 < \log_{10} 2 < 0.31$
 $-0.31 < -\log_{10} 2 < -0.3$
 $1-0.31 < 1-\log_{10} 2 < 1-0.3$
 $0.69 < \log_{10} 5 < 0.7$ ($\log_{10} 5$ の概数)

よって

$$\frac{19}{0.7} < \frac{19}{\log_{10} 5} < \frac{19}{0.69}$$

$$27.14... < \frac{19}{\log_{10} 5} < 27.53...$$

で、 n は、 $n > \frac{19}{\log_{10} 5}$ とする最小の自然数
 なのぞ。

$$n = 28$$

memo

$$n > \frac{19}{\log_{10} 5}$$

27.14...

27.53...

(2)

「 $\ll$ 」は、ここでは「 $\times$ 倍大きい」の記号
 とし、概数

Point 発散速度

① 関数の種類によつて、数字が大きくなる速度が $\ll$ も異なる

$$\sin x \ll \log x \ll x^n \ll a^x \quad (0 < a < 1)$$

例えば x に 1, 2, 3, ... を代入していく場合、左の関数のほうが圧倒的に大きくなる。

② 同じ関数でも、底や累乗が異なれば、速度が $\ll$ も異なる。

$$x^2 \ll x^3, \quad 3^x \ll 4^x$$

例えば、 $3^5 = 243$ $3^6 = 729$
 $4^5 = 1024$ $4^6 = 4096$ となる。

$$5^m + 4^m > 10^{19} \quad \text{で、(1) の答えが 28.}$$

m に 28 以外の整数を代入すると、発散速度の考えから、

$$5^m \gg 4^m \quad (5^m \text{ の方が圧倒的に大きい}) \quad \text{となりそう。}$$

つまり $5^m + 4^m > 10^{19}$ とする m においては
 4^m は 10^{19} を超えるのに、ほとんど貢献していない。

だから、 $5^n > 10^{19}$ が $n=28$ なら、 $5^m + 4^m > 10^{19}$ も $m=28$
 なのでは? と予測]

よって、 $m=27$ で不成立 $5^{27} + 4^{27} < 10^{19} \dots$ ①

$m=28$ で成立 $5^{28} + 4^{28} > 10^{19} \dots$ ②

と示すことを示す。

こんな感じのことを考える

5^m も 4^m も m について単調増加なので、 $5^m + 4^m$ も m について単調増加
 である。

$$5^{28} + 4^{28} > 5^{28} > 10^{19} \quad (\because (1) \text{ の結論})$$

よって $m=28$ では成立する。 (② は OK)

$5^{27} + 4^{27} < 10^{19}$ とすることを示せば、求める m は $m=28$
 であることが示せる

指数対数の対数をとって、証明しよう。

$$\log(5^m + 4^m) \text{ は } \log 5^m + \log 4^m \text{ とはならないことに注意}$$

2024年

東大数学

文系第2問 ②

$$\begin{aligned}
 \log_{10} 4^{27} &= 27 \log_{10} 4 \\
 &= 27 \times \log_{10} 2^2 \\
 &= 27 \times 2 \times \log_{10} 2 \\
 &= 54 \times \log_{10} 2 \quad (*)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 54 \times 0.3 &< \log_{10} 4^{27} < 54 \times 0.31 \\
 16.2 &< \log_{10} 4^{27} < 16.74
 \end{aligned}$$

$$\text{よ、} 10^{16.2} < 4^{27} < \underline{10^{16.74}} \quad 10^{19} (*) \text{より} \\
 \text{以上 小さい} \textcircled{笑}$$

$$\log_{10} 5^{27} = 27 \log_{10} 5 \quad (*) \quad 0.69 < \log_{10} 5 < 0.7$$

$$27 \times 0.69 < \log_{10} 5^{27} < 27 \times 0.7$$

$$18.63 < \log_{10} 5^{27} < 18.9$$

$$\begin{aligned}
 10^{18.63} &< 5^{27} < \underline{10^{18.9}} \\
 5^{27} + 4^{27} &< \underline{10^{18.9}} + 10^{16.74} \quad (*) \\
 10^{19} (*) \text{より 小さいことが 示せられ} \\
 \text{もう少し詳しく 説明する}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \log_{10} 5^{27} &< 18.9 \\
 &= 18 + 0.9 \\
 &= 18 + 3 \times 0.3 \\
 &< 18 + 3 \times \log_{10} 2 \\
 &= 18 + \log_{10} 8 \\
 &= \log_{10} 10^{18} + \log_{10} 8 \\
 &= \log_{10} (8 \times 10^{18})
 \end{aligned}$$

$$\therefore 5^{27} < 8 \times 10^{18}$$

$$\text{よ、} 5^{27} + 4^{27}$$

$$< 8 \times 10^{18} + \underline{10^{16.74}}$$

$$\left(\begin{aligned} &< 8 \times 10^{18} + \underline{10^{18}} \quad 10^{18} \text{に比べて} \\ &< 9 \times 10^{18} \quad \text{と2も小さい} \end{aligned} \right)$$

$$< 10^{19}$$

$$\text{よ、} \underline{M = 28} \#$$

わかりやういと思、
この2行を書きま、
理解できているから、
18より
19より < 10¹⁹ といふ。